به نام او

اصول کنترل غیرخطی

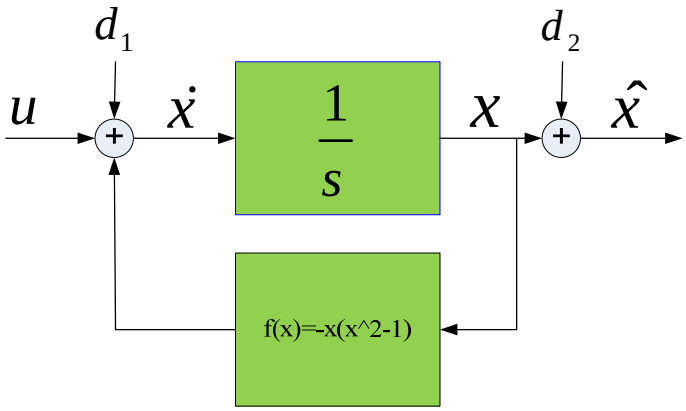
حل تمرین سری اول

مدرس: حیرانی نوبری

سوال ۱)

برای یک سیستم، الگوی تغییراتی مرتبهٔ اول $\dot{x} = -x(x^2-1)+u$ ارائه گردیده است.

الف) نمایشِ بلوکیِ سیستم را به همراهِ این الگو و نایقینی‌هایِ ممکن در ورودی و حالتِ واقعی ارائه کنید.

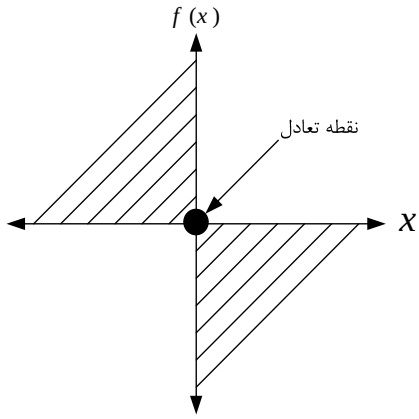


ب) تعادلهایِ الگو را برای $u \equiv 0$ بدست آورده و در مورد نوعِ رفتار حول هر یک داوری کنید.

$$\dot{x} = -x(x^2-1)+u$$

$$u=0 \rightarrow \dot{x} = -x(x^2-1) = 0 \rightarrow -x(x^2-1)=0 \rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=0 \\ x=1 \end{cases}$$

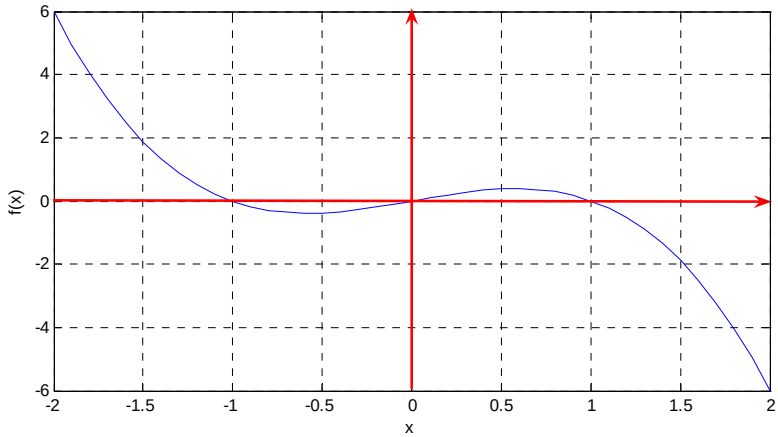
شرط لازم و کافی برای پایداری **سیستم‌های تک متغیره‌ی غیرخطی ثابت با زمان** این است که نمودار $\dot{x}$ بر حسب x آن مطابق شکل زیر در ناحیه‌ی دوم و چهارم واقع باشد (با فرض قرار دادن نقطه‌ی تعادل در مبدا).



برای بررسی رفتار حول نقاط تعادل کافیست که نمودار $\dot{x}$ بر حسب x را برای هر یک از نقاط تعادل رسم کنیم:

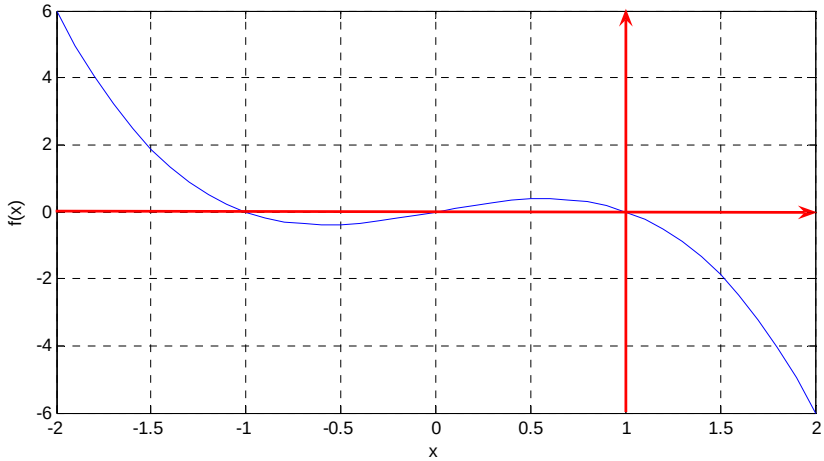
- بررسی رفتار حول نقطه‌ی تعادل $x = 0$

همان طور که مشاهده می‌کنید در این حالت نمودار $\dot{x}$ بر حسب x حول نقطه‌ی تعادل $x = 0$، در ناحیه اول و سوم قرار دارد لذا این نقطه‌ی تعادل، ناپایدار است.



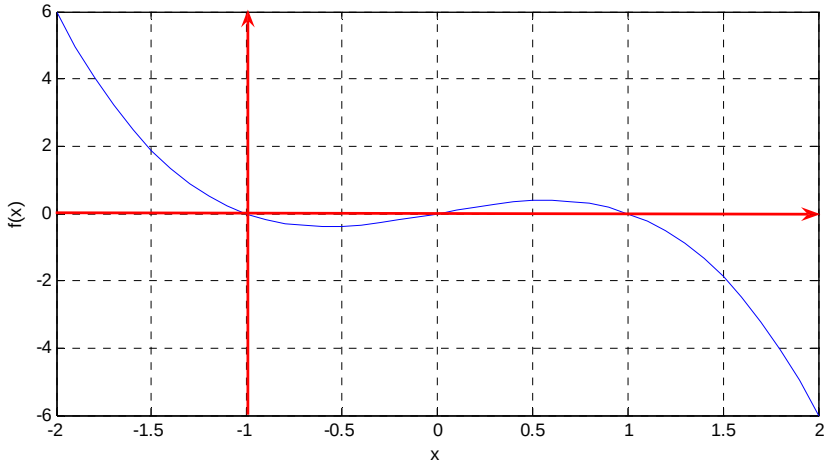
- بررسی رفتار حول نقطه‌ی تعادل $x = 1$

همان طور که مشاهده می‌کنید در این حالت نمودار $\dot{x}$ بر حسب x حول نقطه‌ی تعادل $x = 1$، در ناحیه دوم و چهارم قرار دارد لذا این نقطه‌ی تعادل، پایدار است.



- بررسی رفتار حول نقطه‌ی تعادل $x = -1$

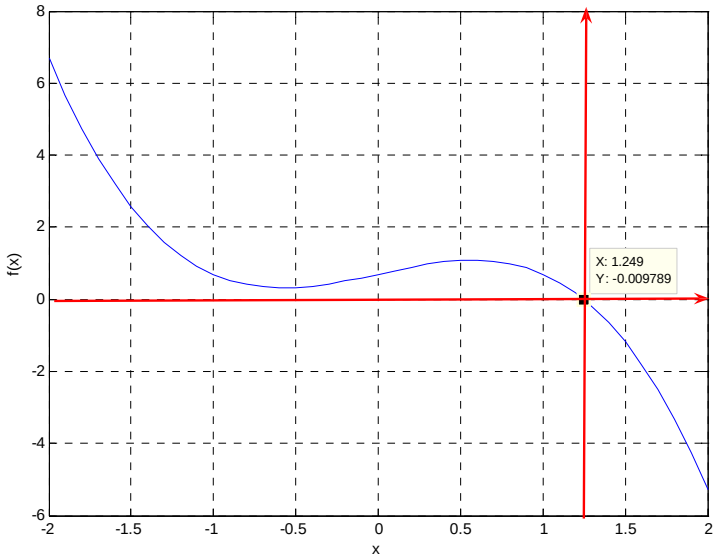
همان طور که مشاهده می‌کنید در این حالت نمودار $\dot{x}$ بر حسب x حول نقطه‌ی تعادل $x = -1$، در ناحیه دوم و چهارم قرار دارد لذا این نقطه‌ی تعادل، پایدار است.



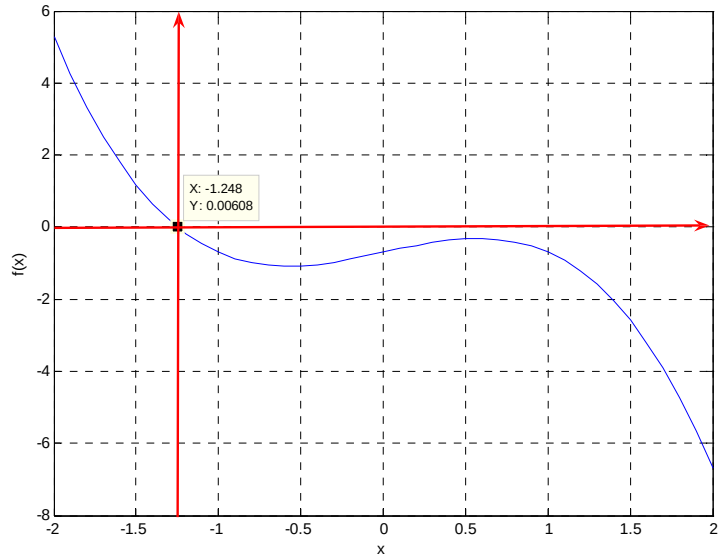
ج) بازای $u \equiv u_0$ که $u_0 \in R$ ، بازای مقادیر گوناگون آن، در مورد تعادل‌های ممکن و نوعِ رفتار حول آنها بدقت بحث کنید.

$$u = u_0 \rightarrow \dot{x} = -x(x^2 - 1) + u_0 = 0$$

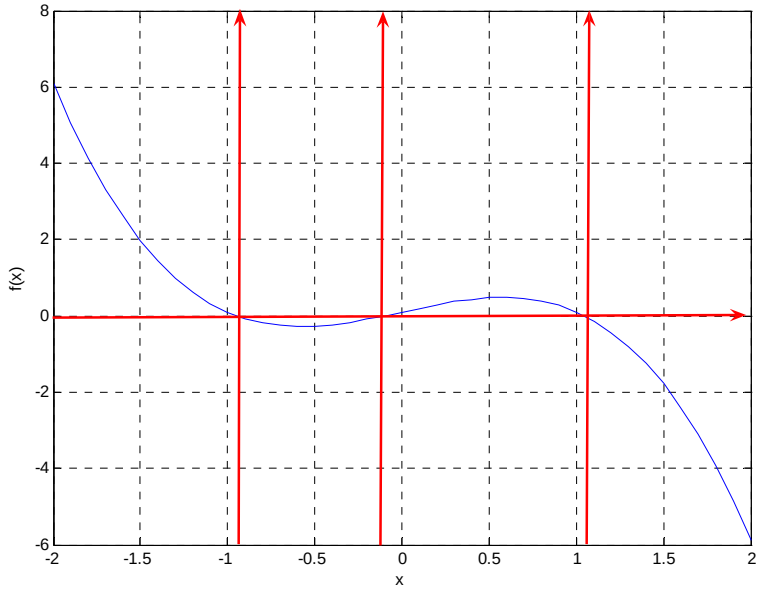
۱- $u_0 > 0.384$: در این حالت تنها یک نقطه‌ی تعادل داریم که مقدار آن بر اساس مقدار u_0 بدست می‌آید. به عنوان مثال برای $u_0 = 0.7$ شکل زیر را خواهیم داشت. همان طور که مشاهده می‌کنید این نقطه‌ی تعادل پایدار است.



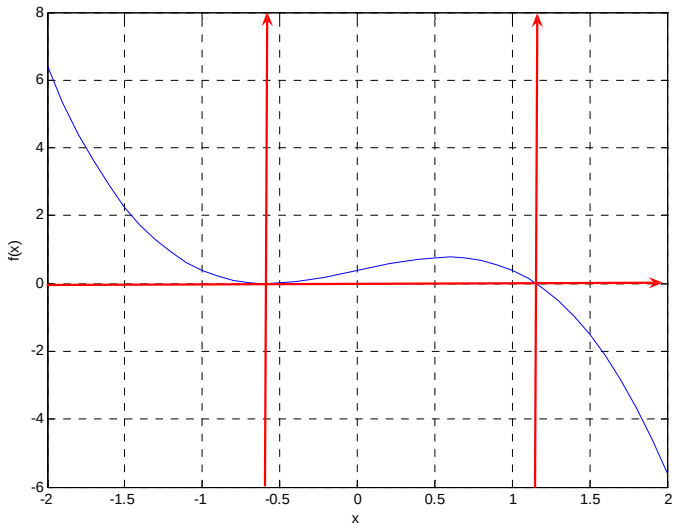
۲- $u_0 < -0.384$: در این حالت تنها یک نقطه‌ی تعادل داریم که مقدار آن بر اساس مقدار u_0 بدست می‌آید. به عنوان مثال برای $u_0 = -0.7$ شکل زیر را خواهیم داشت. همان طور که مشاهده می‌کنید این نقطه‌ی تعادل پایدار است.



۳- $-0.384 < u_0 < 0.384$: در این حالت مثل حالت $u_0 = 0$ سه نقطه‌ی تعادل داریم که مقادیر آنها بر اساس مقدار u_0 بدست می‌آید. به عنوان مثال برای $u_0 = 0.1$ شکل زیر را خواهیم داشت. همان طور که مشاهده می‌کنید یکی از نقاط تعادل که به صفر نزدیکتر است ناپایدار بوده و دوتای دیگر پایدارند.



۴- $u_0 = 0.384$ و $u_0 = -0.384$: در این حالت دو نقطه‌ی تعادل داریم که مقادیر آنها به راحتی قابل محاسبه است. به عنوان مثال برای $u_0 = 0.384$ شکل زیر را خواهیم داشت. همان طور که مشاهده می‌کنید یکی از نقاط تعادل ناپایدار بوده و دیگری پایدار است.



سوال ۳ (الف و ج)

برای هریک از سیستم های زیر همه‌ی نقاط تعادل را یافته نوع هریک از نقاط تعادل تنها را تعیین کنید.

الف)

$$\dot{x}_1 = (1-x_1)x_1 - \frac{2x_1x_2}{1+x_1}$$

$$\dot{x}_2 = \left(2 - \frac{x_2}{1+x_1}\right)x_2$$

$$(1-x_1)x_1 - \frac{2x_1x_2}{1+x_1} = 0 \rightarrow x_1\left(1 - x_1 - \frac{2x_2}{1+x_1}\right)$$

$$= x_1\left(\frac{(1-x_1)(1+x_1) - 2x_2}{1+x_1}\right) = x_1\left(\frac{1-x_1^2-2x_2}{1+x_1}\right)$$

$$\rightarrow x_1(1-x_1^2-2x_2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ 1-x_1^2-2x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\left(2 - \frac{x_2}{1+x_1}\right)x_2 = 0 \rightarrow \left(2 - \frac{x_2}{1+x_1}\right)x_2 = \left(\frac{2+2x_1-x_2}{1+x_1}\right)x_2$$

$$\rightarrow (2+2x_1-x_2)x_2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ 2+2x_1-x_2 = 0 \end{cases}$$

- بررسی نقاط تعادل

هر یک از شروط مربوط به $\dot{x}_1 = 0$ با یکی از شروط مربوط به $\dot{x}_2 = 0$ یک دسته از نقاط تعادل هستند.

$$\begin{cases} \mathrm{x}_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ 2 + 2x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 - x_1^2 - 2x_2 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = \pm 1 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 - x_1^2 - 2x_2 = 0 \\ 2 + 2x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 1 - x_1^2 - 4x_1 - 4 = 0 \\ x_2 = 2(x_1 + 1) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 0 \end{cases}, \begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = -4 \end{cases}$$

ج)

$$\dot{x}_1 = -x_1^3 + x_2$$

$$\dot{x}_2 = x_1 - x_2^3$$

$$-x_1^3 + x_2 = 0 \rightarrow x_2 = x_1^3$$

$$x_1 - x_2^3 = 0 \rightarrow x_1 - x_1^9 = 0 \rightarrow x_1(1 - x_1^8) = 0 \xrightarrow{real\ roots} \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_1 = 1 \\ x_1 = -1 \end{cases}$$

- بررسی نقاط تعادل

هر یک از شروط مربوط به $\dot{x}_1 = 0$ با یکی از شروط مربوط به $\dot{x}_2 = 0$ یک دسته از نقاط تعادل هستند.

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$